ANNALEN
DER
PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren
Fortgeführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,
G. und E. Wiedemann, P. Drude,
W. Wien, M. Planck, E. Grüneisen

6. Folge, Band 8

Der ganzen Reihe 443. Band

Herausgegeben von
F. MÖGLICH
Berlin

Mit 141 Abbildungen im Text

1 9 5 1

JOHANN AMBROSIUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

Inhalt

6. Folge. Band 8

Heft 1/2

Redaktionsschluß am 31. Juli 1950

Heft 3/4

Redaktionsschluß am 10. November 1950

Heft 5/8

Redaktionsschluß am 15. Februar 1951

Über die Zustandsänderung durch den Meßprozeß

Von Gerhart Lüders

Inhaltsübersicht

Die statistische Transformationstheorie enthält nicht nur Vorschriften für die Berechnung von Meßwahrscheinlichkeiten sondern bedarf zur Abrundung einer Aussage über die Zustandsänderung durch den Meßprozeß. Ein durch J. v. Neumann vorgeschlagener Ansatz hierfür wird diskutiert und abgelehnt. Es wird ein Ansatz für die Zustandsänderung, der im wesentlichen mit der „Ausreduktion der Wellenfunktion" identisch ist, vorgelegt. Er erlaubt eine Vertiefung des Begriffs der Verträglichkeit von Messungen. Schließlich werden Messungen an Zuständen, die Nebenbedingungen zu erfüllen haben, betrachtet.

---

1. Einleitung

Die Vorschriften der „statistischen Transformationstheorie" erlauben bekanntlich, bei Kenntnis des „Zustandes" einer Gesamtheit gleichartiger und unabhängiger Systeme Voraussagen über den statistischen Ausfall einer beliebigen Messung zu machen. Der Zustand selbst ist einerseits zeitlichen Änderungen gemäß der Schrödingergleichung, andererseits aber auch Änderungen infolge der an der Gesamtheit vorgenommenen Meßprozesse unterworfen. Der Zustand einer Gesamtheit kann überhaupt nur auf Grund vorausgegangener Meßprozesse bekannt sein. Um die statistische Transformationstheorie zu einem abgeschlossenen und widerspruchsfreien Ganzen zu machen, ist es daher unumgänglich notwendig, diese zu ergänzen durch eine Aussage über die Veränderung eines quantentheoretischen Zustandes durch den Meßprozeß.

Es ist vielleicht nicht überflüssig zu betonen, daß sich Aussagen über die Veränderung eines Zustandes durch Messung nicht bereits aus der Quantentheorie selbst ergeben, indem man das Meßgerät in die Schrödingergleichung einbezieht. Durch die Messung, den Akt der Kenntnisnahme, kommt ein Element hinzu, das in den Formulierungen der Quantentheorie nicht bereits enthalten ist.

Der Ansatz für die Zustandsänderung durch Messung ist naheliegend — und wohl allgemein als richtig anerkannt — wenn es sich um die Messung einer Größe mit einfachen Eigenwerten handelt (zwischen Größen und den zugeordneten Operatoren soll im folgenden nicht unterschieden werden). Sofern es sich dagegen um eine Messung entarteter Größen handelt, besteht einerseits — wenigstens für Ortsmessungen — die Aussage von der „Ausreduktion der Wellenfunktion"[1]) und andererseits ein Ansatz von J. v. Neumann[2]). Dessen Überlegungen glaubt sich der Verfasser aber nicht anschließen zu dürfen, wie noch im einzelnen darzulegen

---

[1]) Vgl. z. B. W. Pauli in Hdb. d. Phys., 2. Aufl., Bd. 24/1, S. 83, Berlin 1933; insbes. Ziffer 9.

[2]) J. v. Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin 1932.

sein wird. Es muß jedoch betont werden, daß die ganze Problemstellung dem Verfasser erst durch das Studium des J. v. Neumannschen Werkes deutlich wurde, und daß auch der hier vorzulegende Ansatz für die Änderung eines quantenphysikalischen Zustandes durch den Meßprozeß fortgesetzt die durch J. v. Neumann bereitgestellten mathematischen Hilfsmittel verwendet.

Der Ansatz, mit dem in der vorliegenden Arbeit bekannt gemacht werden soll, ist im wesentlichen identisch mit der „Ausreduktion der Wellenfunktion". Er erlaubt zwei neue, wenigstens im Gedankenexperiment nachprüfbare Kennzeichnungen der Verträglichkeit von Messungen und damit eine Vertiefung dieses Begriffs vom physikalischen Standpunkt aus.

1. An einer Gesamtheit werde eine Größe R gemessen und diejenige Teilgesamtheit, die einen bestimmten Meßwert r_k liefert, ausgesondert. Unmittelbar anschließend (so daß also von der Veränderung des Zustandes gemäß der Schrödingergleichung abgesehen werden kann) werde an dieser Teilgesamtheit die Größe S gemessen und die Teilgesamtheit, die den Meßwert s_j liefert, aussortiert. Die Messung der Größe R und diejenige der Größe S sollen miteinander verträglich genannt werden, wenn eine nachfolgende R-Messung mit Sicherheit den Meßwert r_k liefert, einerlei, wie der Zustand der Gesamtheit vor der ersten R-Messung war. Durch Ausführung einer genügenden Anzahl von Messungen, die in dem hier definierten Sinne paarweise miteinander verträglich sind, läßt sich eine „Maximalbeobachtung" im Sinne von Dirac durchführen und ein „reiner Zustand" herstellen und aussondern.

2. Die zweite Kennzeichnung der Verträglichkeit von Messungen handelt von Messungen ohne nachfolgende Aussonderung von Teilgesamtheiten. In diesem zweiten Sinne sollen die Messungen zweier Größen R und S miteinander verträglich genannt werden, wenn durch die Dazwischenschaltung der R-Messung (ohne anschließende Aussonderung) der Ausfall der S-Messung nicht beeinflußt wird. Die Messungen können dabei zu verschiedenen Zeiten stattfinden.

Unter Verwendung des vorgelegten Ansatzes für die Zustandsänderung durch Messung kann geprüft werden, welche mathematischen Bedingungen die Operatoren R und S zu erfüllen haben, damit Verträglichkeit der Messungen im 1. und 2. Sinn gewährleistet ist. Es zeigt sich, daß für beide Arten der Verträglichkeit genau die Vertauschbarkeit der Operatoren R und S notwendig und hinreichend ist. Die mathematische Beweisführung soll dabei rein algebraisch durchgeführt werden. Analytische Probleme wie die Frage nach dem Existenzbereich der Operatoren sollen unberücksichtigt bleiben.

Schließlich werden Messungen an Systemen betrachtet, deren Zustand durch Nebenbedingungen eingeschränkt ist (z. B. Systeme gleichartiger Teilchen und die Quantenelektrodynamik in der Formulierung von Fermi). Es scheint dem Verfasser wesentlich zu sein, daß nicht nur nachgewiesen wird, daß die Nebenbedingung bei einer zeitlichen Änderung des unbeobachteten Systems gemäß der Schrödingergleichung gewahrt bleibt, sondern daß sie auch noch nach Ausführung eines Meßprozesses erfüllt ist. Damit tritt bei derartigen Systemen eine Einschränkung der „erlaubten" — und das heißt wohl: physikalisch möglichen — Messungen auf.

2. Ansatz für die Zustandsänderung

Entsprechend den Betrachtungen von J. v. Neumann (l. c.) sollen die Überlegungen nicht auf „reine Zustände", die sich durch einen Zustandsvektor („Wellenfunktion") ψ kennzeichnen lassen, beschränkt, sondern auf „Gemische" ausgedehnt werden. Wenn man Messungen ohne nachfolgende Aussonderung (vgl. unten) einbezieht, ist das sogar unumgänglich notwendig. Dem Zustand einer beliebigen Gesamtheit gleichartiger und voneinander unabhängiger Systeme ist eindeutig ein positiver und normierter[3]) hermitescher Operator Z zugeordnet.

Der der Größe R zugeordnete Operator besitze die folgende Spektraldarstellung

$$R = \sum r_k P_k{}^{4)}, \tag{1}$$

wobei die r_k die Eigenwerte (Meßwerte) darstellen und für die Projektionsoperatoren gilt

$$P_j P_k = \delta_{jk} P_k, \tag{2a}$$

$$\sum P_k = 1. \tag{2b}$$

(Zur Vereinfachung der Behandlungsweise sei angenommen, daß alle auftretenden Operatoren reine Punktspektren besitzen). Nach J. v. Neumann errechnet sich die Wahrscheinlichkeit $w(r_k, Z)$ dafür, daß der Wert r_k an den einzelnen Systemen der durch den Operator Z repräsentierten Gesamtheit gemessen wird, zu

$$w(r_k, Z) = \mathrm{Sp}\,(P_k Z). \tag{3}$$

Sie ist also allein durch den Zustand (Z) und den zu dem Meßwert r_k gehörigen Projektionsoperator (Teilraum des Hilbertschen Raumes) bestimmt. Seine Rechtfertigung findet der Ansatz (3) — wenigstens bisher — nur teilweise durch das Experiment, hauptsächlich jedoch durch seine zwingende Einfachheit.

Wird jetzt der Zustand der Gesamtheit nach der Messung betrachtet, so kann man entweder diejenige Teilgesamtheit, die einen bestimmten Meßwert, z. B. r_k, liefert, ausgesondert denken (Messung mit nachfolgender Aussonderung von r_k) oder man denkt sich die vollständige Gesamtheit nach dem Meßprozeß wieder zusammengefaßt (Messung mit nachfolgender Zusammenfassung).

In zwei speziellen Fällen scheint Einhelligkeit darüber zu bestehen, in welcher Weise der Zustand einer Gesamtheit durch den Meßprozeß verändert wird:

1. Ist der Eigenwert r_k einfach (d. h. $\mathrm{Sp}\, P_k = 1$), so geht Z bei Messung von R und nachfolgender Aussonderung von r_k über in

$$Z_k' = P_{[\psi_k]} \cdot \mathrm{Sp}\,(P_{[\psi_k]} Z) \tag{4}$$

mit

$$R\,\psi_k = r_k \psi_k. \tag{5}$$

Der Spurausdruck stellt nach (3) die relative Häufigkeit dar, mit der r_k verwirklicht ist. Der Projektionsoperator $P_{[\psi_k]}$ projiziert jeden Vektor auf den Vektor ψ_k. Stellt Z einen reinen Zustand dar, so kann dieser statt durch Z durch einen Zustandsvektor φ gekennzeichnet werden und der Ansatz (4) bedeutet, daß die ausgesonderte Teilgesamtheit nach der Messung durch den Zustandsvektor ψ_k gekennzeichnet werden kann.

2. Sind alle Eigenwerte von R einfach, so geht Z bei Messung von R mit nachfolgender Zusammenfassung über in das normierte Gemisch

$$Z' = \sum Z_k' = \sum P_{[\psi_k]}\, \mathrm{Sp}\,(P_{[\psi_k]} Z). \tag{6}$$

---

[3]) Ein hermitescher Operator heißt „positiv", wenn $(\psi, Z\,\psi) \geq 0$ für alle ψ. Er heißt „normiert", wenn gilt $\mathrm{Sp}\, Z = 1$ (Sp = Spur).

[4]) Alle Summen sind über k zu erstrecken, sofern nicht das Gegenteil ausdrücklich angemerkt ist.

Über die Zustandsänderung bei Messung entarteter Größen stellte J. v. Neumann folgendes Postulat auf: Obgleich die physikalische Größe R selbst kein bestimmtes Orthogonalsystem von Eigenvektoren auszeichnet, tut dies doch das jeweilige Meßgerät. Zu jedem einzelnen Gerät, das R mißt, gehört danach bei festgehaltenem r_k ein ganz bestimmtes Orthogonalsystem ψ_{kl} (l laufender Index), und es gilt auch dann (6) mit entsprechender Summation über k und l.

Zwar liefert der Ansatz von J. v. Neumann unmittelbar eine Spektraldarstellung von Z'. Jedoch scheinen uns zwei ernste Bedenken gegen ihn geltend gemacht werden zu können:

1. Die Messung einer hochgradig entarteten Größe erlaubt nur verhältnismäßig schwache Aussagen über die betrachtete Gesamtheit. Es sollte daher auch die hierdurch hervorgerufene Zustandsänderung, insbesondere bei nachfolgender Aussonderung, gering sein, während der Ansatz von J. v. Neumann gerade dann ein höchst kompliziertes Gemisch liefert. Den Extremfall liefert die „Messung" des Einheitsoperators. Dabei wird über die Gesamtheit nichts erfahren und sie sollte den „Meßprozeß" unbeeinflußt überstehen [5]).

2. Man würde erwarten, daß, entsprechend der Vorschrift (3) zur Berechnung der Meßwahrscheinlichkeiten, auch die Zustandsänderung, außer natürlich von Z, nur von R selbst, also den Projektionsoperatoren P_k, abhängt.

Der in dieser Arbeit vorzulegende Ansatz ergibt sich nahezu zwangsläufig, wenn man die beiden gegen J. v. Neumann erhobenen Bedenken als gerechtfertigt anerkennt. Es werde deshalb postuliert

1. Bei Messung von R mit nachfolgender Aussonderung von r_k geht Z über in

$$Z'_k = P_k Z P_k. \tag{7}$$

Z_k ist nicht normiert (vgl. [3])) sondern so gewählt, daß die Spur die relative Häufigkeit des Auftretens von r_k in der Gesamtheit wiedergibt. Stellt speziell Z einen reinen Fall dar, so gewährleistet der Ansatz (7), daß auch nach der Messung, sofern anschließend eine Ausssonderung von r_k stattfindet, wieder ein reiner Fall vorliegt.

2. Findet nach der Messung von R wieder eine Zusammenfassung der vollen Gesamtheit statt, so ändert sich Z als Folge von (7) in

$$Z' = \sum Z'_k = \sum P_k Z P_k. \tag{8}$$

Mittels elementarer algebraischer Rechnungen läßt sich nachweisen, daß die Operatoren Z'_k und Z' hermitesch und positiv sind, sofern Z selbst diese Eigenschaft hat und weil die Projektionsoperatoren P_k hermitesch sind. Ebenso überträgt sich die Normiertheit von Z auf diejenige von Z'.

(4) und (6) ergeben sich, wie sich zeigen läßt, als Spezialfälle von (7) und (8), falls der Meßwert r_k bzw. alle Meßwerte einfach sind. Der Ansatz (7) gibt außerdem genau das wieder, was mit dem Ausdruck „Ausreduktion der Wellenfunktion" gemeint ist.

3. Verträglichkeit von Messungen

Zunächst werde die in der Einleitung gegebene erste Kennzeichnung der Verträglichkeit von Messungen unter Benutzung des Ansatzes (7) näher untersucht.

---

[5]) Für einen Augenblick schließen wir uns dabei der Fiktion an, daß jedem hermiteschen Operator eine meßbare Größe entspricht, obwohl wir sie aus physikalischen Erwägungen glauben grundsätzlich ablehnen zu müssen.

Nach Ausführung der R-Messung, Aussonderung von r_k, anschließender S-Messung und Aussonderung von s_j geht Z über in den (nichtnormierten) Zustand

$$Z''_{kj} = \tilde{P}_j P_k Z P_k \tilde{P}_j. \tag{9}$$

Dabei soll der Operator P_k zur Spektraldarstellung von R, und zwar zum Eigenwert r_k (vgl. (1)), und der Operator $\tilde{P}_j$ zum Eigenwert s_j von S gehören. Die Aussage, daß an Z''_{kj} mit Sicherheit r_k gemessen wird, läßt sich formulieren

$$\mathrm{Sp}\,(Z''_{kj} P_l) = 0 \quad \text{für alle } l \neq k. \tag{10}$$

Die Forderung, daß (10) für alle Z und alle k richtig sein soll, erweist sich als gleichbedeutend mit der Vertauschbarkeit der beiden Projektionsscharen

$$\tilde{P}_j P_l = P_l \tilde{P}_j \tag{11}$$

und diese wiederum ist bekanntermaßen gleichbedeutend mit der Vertauschbarkeit der Operatoren R und S.

Wie man nämlich sofort mittels (11) und (2a) sieht, folgt aus der Vertauschbarkeit der Projektionsscharen sofort (10), also die Verträglichkeit der Messungen in dem angegebenen Sinn. Etwas schwieriger ist die Umkehrung ((11) als Folge von (10)) zu beweisen.

Da (10) für alle Z, insbesondere also alle $P_{[\varphi]}$, gelten soll, folgt zunächst

$$P_k \tilde{P}_j P_l \tilde{P}_j P_k = 0. \tag{12}$$

Unter Verwendung des nachstehenden Hilfssatzes schließt man daraus weiter

$$P_l \tilde{P}_j P_k = 0. \tag{13}$$

Hilfssatz: Ist B hermitesch und positiv und gilt $C^* B C = 0$ ($*$ = hermitesch adjungierter Operator), so ist sogar $BC = 0$.

(Beweis durch Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung auf das „Skalarprodukt" $(\psi, \varphi)_B \equiv (\psi, B\varphi)$; Anwendung des Hilfssatzes, indem gesetzt wird $B = P_l$, $C = \tilde{P}_j P_k$.)

Summiert man (13) über alle $k \neq l$, so folgt zunächst wegen (2b)

$$P_l \tilde{P}_j = P_l \tilde{P}_j P_l \tag{14}$$

und durch Übergang zur hermitesch adjungierten Gleichung

$$\tilde{P}_j P_l = P_l \tilde{P}_j P_l. \tag{15}$$

Aus (14) und (15) zusammen folgt (11), wie behauptet wurde.

Die zweite Kennzeichnung der Verträglichkeit von Messungen besagt, daß der Ausfall einer Messung der Größe S durch die Dazwischenschaltung einer R-Messung nicht verändert werden soll. Diese Aussage ist unter Benutzung von (3) und (8) folgendermaßen mathematisch zu formulieren:

$$\mathrm{Sp}\,(\tilde{P}_j \cdot \sum P_k Z P_k) = \mathrm{Sp}\,(\tilde{P}_j Z) \quad \text{für alle } j. \tag{16}$$

Denn die linke Seite stellt die Wahrscheinlichkeit dar, s_j zu messen, nachdem die R-Messung vorausgegangen ist und die rechte Seite ergibt die entsprechende Wahrscheinlichkeit ohne Zwischenschaltung der R-Messung.

Die Gültigkeit von (16) für alle Z ergibt sich als mit (11) und also mit der Vertauschbarkeit von R mit S gleichbedeutend. Wiederum braucht nur nachgewiesen zu werden, daß (11) eine Folge von (16) ist, während sich die Umkehrung unmittelbar erkennen läßt.

Genau so wie (12) aus (10) gewonnen wurde, folgt jetzt aus (16)

$$\sum P_k \tilde{P}_j P_k = \tilde{P}_j . \tag{17}$$

Durch Multiplikation mit P_l von links folgt wegen (2a) sofort (14). Damit ist die Behauptung bewiesen.

Beide Kennzeichnungen der Verträglichkeit haben sich damit, trotz des äußeren Anscheins der Definitionen, als symmetrisch in R und S und als im wesentlichen gleichwertig erwiesen. Die zweite Kennzeichnung ist jedoch etwas weitertragend als die erste, da sie sich auf Messungen zu verschiedenen Zeitpunkten ausdehnen läßt.

In der Heisenbergdarstellung hält man Z zeitlich konstant und wälzt die zeitliche Veränderung auf die Operatoren hinüber. In Verallgemeinerung der zweiten Kennzeichnung gilt dann, daß eine R-Messung zur Zeit t_1 den Ausfall einer S-Messung zur (späteren) Zeit t_2 bei beliebigem Zustand Z dann und nur dann nicht ändert, wenn die Operatoren $R(t_1)$ und $S(t_2)$ (in der Heisenbergdarstellung) miteinander vertauschbar sind. Diese Behauptung wird in der Literatur bereits gelegentlich verwendet. Zu einem beweisbaren Satz wird sie jedoch nur, wenn ein bestimmter Ansatz für die Zustandsänderung durch Messung gemacht wird.

4. Systeme mit Nebenbedingungen

In den Anwendungen tritt manchmal die Forderung auf, daß die Wellenfunktionen ψ (allgemeiner Zustände Z, vgl. (20)) einer Nebenbedingung

$$N\psi = 0 \tag{18}$$

zu genügen haben.

Zwei Beispiele sollen das Gemeinte verdeutlichen.

1. Bei Systemen, die aus mehreren gleichartigen Teilchen bestehen, ist eine Symmetriebedingung zu erfüllen, die sich in die Gestalt (18) bringen läßt.

2. Bei der Quantenelektrodynamik in der Formulierung von Fermi[6]) hat das Wellenfunktional der Menge

$$\left(\sum_{\mu=1}^{\psi} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}\right) \psi = 0 \tag{19}$$

von Nebenbedingungen zu genügen.

Betrachtet man Zustände Z, so ist

$$N Z = 0 \tag{20}$$

damit gleichbedeutend, daß Z nur aus solchen reinen Zuständen aufgebaut werden kann, die (18) erfüllen.

Meist pflegt lediglich gezeigt zu werden, daß aus der Richtigkeit von (18) bzw. (20) für einen bestimmten Zeitpunkt diejenige für alle späteren Zeitpunkte folgt, sofern die Gesamtheit sich selbst überlassen bleibt. Das ist sicher der Fall, wenn der Hamiltonoperator H mit N vertauschbar ist. Es scheint aber ebenso wichtig zu sein, nachzuweisen, daß auch die Zustandsänderung bei Messung einer Größe R die Gültigkeit von (18) bzw. (20) nicht in Frage stellt.

---

[6]) Vgl. G. Wentzel, Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder, Wien 1943; insbes. Kap. IV.

Man bestätigt leicht, daß (20) als Folge des Ansatzes (7) auch für Z'_k erfüllt ist, falls R (d. h. der Projektionsoperator P_k) mit N (bzw. der Menge von Nebenbedingungen) vertauschbar ist. Es gilt nämlich dann

$$N Z'_k \equiv N P_k Z P_k = P_k N Z P_k = 0. \tag{21}$$

Auf Grund dieses Sachverhalts soll folgendes **Meßbarkeitspostulat** vorgeschlagen werden: Sind alle zulässigen Zustände einer Gesamtheit physikalischer Systeme durch eine Nebenbedingung (20) (oder durch eine Menge miteinander verträglicher Nebenbedingungen) eingeschränkt, so sind nur Messungen solcher Größen physikalisch möglich, deren zugeordnete Operatoren mit der Nebenbedingung N (oder der Menge von Nebenbedingungen) vertauschbar sind.

Wendet man dieses Postulat auf die beiden am Anfang der Ziffer genannten Beispiele an, so erkennt man, daß die Messung von Größen, die in den Teilchen symmetrisch sind, durch das Postulat nicht verboten wird und daß ebenso die Messung der elektrischen und magnetischen Feldstärken nicht gegen das Postulat verstößt, aber wohl diejenige des skalaren Potentials.

Wesentliche Gesichtspunkte verdanke ich zahlreichen Diskussionen mit Herrn Dr. H. Fack (Hamburg) über Grundlagenfragen der Quantentheorie. Ich möchte gern auch an dieser Stelle Herrn Fack hierfür herzlich danken.

Hamburg, Institut für Theoretische Physik der Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 18. Oktober 1950.)